PART3　三角形の面積

3 (1) △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，△OAB の面積を S とする。

(i) S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(ii) (i)の結果を利用し，S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ。

(2) A(1，−1)，B(2，1)，C(4，3) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。

Point Pickup

$\angle AOB=\theta$ とすると，△OAB の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}OA\times OB\sin\theta$ である。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を用いて，S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことができる。

第10講　PART3　確認問題

1　3 点 A(2，2)，B(7，3)，C(−4，6) を頂点とする三角形 ABC の面積 S を求めよ。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{カキク}}$ より

$S=\boxed{\text{ケコ}}$

PART3　三角形の面積

3 (1) △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，△OAB の面積を S とする。

(i) S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(ii) (i)の結果を利用し，S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ。

(2) A(1，−1)，B(2，1)，C(4，3) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。

(1) (i) $\angle AOB=\theta$ $(0°<\theta<180°)$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}OA\times OB\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\times\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

(ii) $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2,\quad |\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2,\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

よって，(i)の結果から

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ 4)$　より

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\quad |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times3+2\times4=11$$

よって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2\times5^2-11^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{125-121}=1$

(別解)

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|1\times4-2\times3|=1$$

第10講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：26，ウ：2，エオ：13，
カキク：-26，ケコ：13

[解説]

A(2，2)，B(7，3)，C(-4，6) より

$$\overrightarrow{AB}=(5,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-6,\ 4)$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-6)^2+4^2}=2\sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times(-6)+1\times4=-26$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{26})^2\times(2\sqrt{13})^2-(-26)^2}$$ [A]

$$=\frac{1}{2}\sqrt{26\times26\times2-26^2}=13$$

（別解）

$$S=\frac{1}{2}|5\times4-1\times(-6)|=13$$ [B]

[A]　△ABC の面積を S とすると
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

[B]　△ABC において，
$\overrightarrow{AB}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(b_1,\ b_2)$
のとき，△ABC の面積 S は
$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$